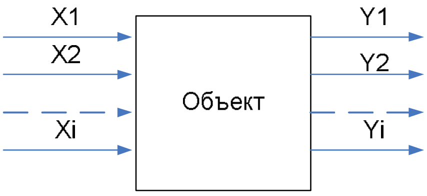
Лабораторная работа № 1

Обработка результатов экспериментов с помощью среды MathCad

Цель лабораторной работы – приобретение навыков применения системы компьютерной математики MathCad для обработки результатов экспериментов.

1.1. Основные сведения

Часто при анализе сложных систем как объекта исследования используется модель «черного ящика», которую предсталют в виде представляют в виде прямоугольника с выходными и входными стрелками.



Входные стрелки соответствуют входным величинам **(x)** , а выходные - выходным величинам **(y)** . Последние характеризуют состояние объекта исследования. Первыми обозначается все, что оказывает влияние на выходные величины.

Предполагается, что внутренняя структура обьекта и сущность связей между входными и выходными величинами исследователю неизвестны, о них он судит по тому, какие значения принимают выходные величины при данных значениях входных.

Эксперимент - метод познания действительности в контролируемых и управляемых условиях. Экспериментальное изучение объектов имеет ряд преимуществ: в процессе эксперимента становится возможным изучение того или иного явления в "чистом виде"; эксперимент позволяет исследовать свойства объектов действительности в экстремальных условиях; важнейшим достоинством эксперимента является его повторяемость.

Свойства предметов и явлений и их отношений можно описать в виде существующих математических законов и структур.

Более точное математическое описание процессов и явлений приводит к появлению сложных систем интегральных, дифференциальных, трансцендентных уравнений и неравенств, которые не удается решить аналитическими методами в явном виде.

Для решения таких задач приходится прибегать к вычислительным алгоритмам, использовать какие-либо бесконечные процессы, сходящиеся к конечному результату. Приближенное решение задачи получается при выполнении определенного числа шагов.

Развитие ЭВМ стимулировало более интенсивное развитие вычислительных методов.

Структуры «мира математического» успешно применяются для анализа «мира экспериментального», ибо первый является идеально-абстрактной, обобщенной и логически более совершенной картиной второго.

Поэтому умение обрабатывать результаты экспериментов с помощью математических методов и ЭВМ весьма актуально.

1. 2. Метод наименьших квадратов

Пусть на вход некоторого устройства подается сигнал x, а на выходе измеряется сигнал y. Известно, что величины x и y связаны функциональной зависимостью, но какой именно – неизвестно. Требуется приближенно определить эту функциональную зависимость $y = \varphi(x)$ по опытным данным. Пусть в результате n измерений получен ряд экспериментальных точек (x_i, y_i). Известно, что через n точек можно всегда провести кривую, аналитически выражаемую многочленом (n -1)-й степени. Этот многочлен называют *интерполяционным*. И вообще, замену функции $\varphi(x)$ на функцию $\psi(x)$ так, что их значения совпадают в заданных точках $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$, $i = 1,2\ldots,n$ называют *интерполяцией*.

Однако такое решение проблемы не является удовлетворительным, поскольку $y_i \neq \varphi(x_i)$ из-за случайных ошибок измерения и влияния на измерения значений y_i помех и шумов в устройстве. Так что $y_i = \varphi(x_i)+\delta_i$, где δ_i – некоторая случайная ошибка. Поэтому требуется провести кривую так, чтобы она в наименьшей степени зависела от случайных ошибок. Эта задача называется *сглаживанием (аппроксимацией*) экспериментальной зависимости и часто решается методом *наименьших квадратов*. Сглаживающую кривую называют *аппроксимирующей*.

Задача аппроксимации решается следующим образом. В декартовой прямоугольной системе координат наносят точки (x_i, y_i).. По расположению этих точек высказывается предположение о принадлежности искомой функции к определенному классу функций. Например, линейная функция $\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x$, квадратичная $\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+ \alpha_2 x^2$, и т.д. В общем случае $\varphi(x)= \varphi(x,\alpha_0,\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_r)$. Неизвестные параметры функции $\alpha_0,\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_r$ определяются из требования минимума суммы квадратов случайных ошибок, т.е. минимума величины

$$\delta = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi(x_i,\alpha_0\alpha_1,\ldots,\alpha_r))^2$$

Величина δ называется также суммарной *невязкой*. Необходимым условием минимума функции нескольких переменных является обращение в нуль частных производных невязки:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi(x_i,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_r))\frac{d\varphi}{d\alpha_j} = 0, \quad j = 0,1,\ldots r$$

Решая систему уравнений , находим неизвестные параметры α_j и тем самым полностью определяем функцию, которая наилучшим образом (в смысле наименьших квадратов отклонений от исходных точек или наименьшей суммарной невязки) аппроксимирует (приближает) искомую функцию $\boldsymbol{\varphi(x)}$.

Остановимся подробнее на линейной зависимости $\boldsymbol{\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1 x}$.

Дифференцируя , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i)x_i = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $\alpha_0 = M_y - \alpha_1 M_x$, где

$$M_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$M_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Подставляя выражение для α_0 во второе уравнение, найдем

$$\alpha_1 = \frac{K_{xy}}{S^2}$$

где $K_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_X)(y_i - M_y)$, $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_X)^2$

Таким образом,

$$\varphi(x) = (M_y - \frac{K_{xy}}{S^2}M_X) + \frac{K_{xy}}{S^2}x$$

есть искомая линейная функция.

Ввиду простоты расчетов аппроксимация линейной зависимости используется довольно часто. Кроме того, многие функции, зависящие от двух параметров, можно *линеаризовать* путем *замены переменных*.

Для этого необходимо подобрать такое преобразование исходной зависимости $\boldsymbol{y(x)=\varphi(x, \alpha_0, \alpha_1)}$, в результате которого она приобретает линейный вид $\boldsymbol{y = b_0+b_1 u}$. Далее решается задача линейной аппроксимации для новой зависимости и вычисленные коэффициенты $\boldsymbol{b_0}$ и $\boldsymbol{b_1}$ пересчитываются в коэффициенты $\boldsymbol{\alpha_0}$ и $\boldsymbol{\alpha_1}$.

1.3 Задание к лабораторной работе.

Задание1. Экспериментатор измерял некоторую величину Y в зависимости от заданного значения X. Он провел 3 серии опытов и получил следующие результаты:

X	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
Y(опыт №1)	122.6	101.3	94.6	86.7	82.1	80.4
Y(опыт№2)	123.0	100.4	94.9	88.3	83.7	81.6
Y(опыт№3)	121.9	102.4	92.9	87.7	81.8	81.2

а) Сформировать из результатов эксперимента массив данных.
б) Используя основные операции с матрицами сформировать новый массив, нулевс столбец которого содержит значение X, а первый - средние значения Y для 3-х опы
в) Нанести экспериментальные точки и их средние значения в любом из опытов на график.
г) Сформированный документ оформить как отчет по лабораторной работе.

Задание 2. Экспериментатор установил, что при некоторой постоянной температу суммарное давление смеси паров бензола, дихлоретана и хлорбензола в однофазнс системе равняется значениям, приведенным в таблице:

Состав смеси, мольные части			Давление Р, Па
Бензол	Дихлорэтан	Хлорбензол	
0,80	0,10	0,10	1840
0,20	0,70	0,10	1860
0,05	0,05	0,90	236

а) Найти значение давления паров чистых компонентов при той же постоянной температуре.

ЗАДАНИЕ 3. В результате эксперимента была определена некоторая табличная зависимость. С помощью метода наименьших квадратов подберите функциональную зависимость, заданного вида. Определите суммарную ошибку.

1.4. Варианты индивидуальных заданий

1.4.1. Для заданий №1 и №2 результаты опытов экспериментатора задать самостоятельно.

1.4.2. Варианты для задания №3

Вариант №1. $P(s)=As^3+Bs^2+D$

s	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
P	12	10.1	11.58	17.4	30.68	53.6	87.78	136.9	202.5	287

Вариант № 2. $G(s)=As^2-B$

s	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
G	3.99	5.65	6.41	6.71	7.215	7.611	7.83	8.19	8.3

Вариант № 3. $K(s)=As^2/Bs+D$

s	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	3.5	3.5	4
K	2.31	2.899	3.534	4.412	5.578	6.92	8.699	10.69	13.39

Вариант № 4. $V(s)=As^3*Bs+D$

s	0.2	0.7	1.2	1.7	2.2	2.7	3.2
V	2.3198	2.8569	3.5999	4.4357	5.5781	6.9459	8.6621

Вариант № 5. $W(s)=A/(Bs+C)$

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
W	0.529	0.298	0.267	0.171	0.156	0.124	0.1	0.078	0.075

Вариант № 6. $Q(s)=As^2+Bs+C$

s	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
Q	5.21	4.196	3.759	3.672	4.592	4.621	5.758	7.173	9.269

Вариант № 7. $Y=x/(Ax-B)$

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
Y	0.61	0.6	0.592	0.58	0.585	0.583	0.582	0.57	0.572	0.571

Вариант № 8. $V=1/(A+BU^2)$

u	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
V	5.197	7.78	11.14	15.09	19.24	23.11	26.25	28.6	30.3

Вариант № 9. $R=At^2+14.5$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	2.11	5.2	11.15	19.27	26.2	30.37	32.0	33.0	33.22	33.2

Вариант № 10. $Z=At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+K$

t	0.66	0.9	1.17	1.47	1.7	1.74	2.08	2.63	3.12
Z	38.9	68.8	64.4	66.5	64.95	59.36	82.6	90.63	113.5

Вариант № 11. $R=Ch^2+Dh+K$

h	2	4	6	8	10	12	14	16
R	0.035	0.09	0.147	0.2	0.24	0.28	0.31	0.34

Вариант №12. $G=DL+K$

L	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
G	2	2.39	2.81	3.25	3.75	4.11	4.45	4.85	5.25

Вариант № 13. $Y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

x	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
Y	1.5	2.7	3.9	5.5	7.1	9.1	11.1	12.9	15.5	17.9

Вариант № 14. $Y=Ax^3+Cx+D$

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
Y	1.2	2.2	3.0	6.0	7.7	13.6

Вариант № 15. $R=Ch^2+K$

h	0.29	0.57	0.86	0.14	1.43	1.71	1.82	2
R	3.33	6.67	7.5	13.33	16.67	23.33	27.8	33.35

Вариант № 16. $Z=At^4+Ct^2+K$

t	1	1.14	1.29	1.43	1.57	1.71	1.86	1.92	2
Z	6.2	7.2	9.6	12.5	17.1	22.2	28.3	35.3	36.5

Вариант № 17. $Z=At^4+Bt^3+Dt+K$

t	2	2.13	2.25	2.38	2.5	2.63	2.75	2.88	3
Z	12.57	16.43	19	22.86	26.71	31.86	37.0	43.43	49.86

Вариант № 18. $Z=At^4+Bt^3+Ct^2+K$

t	3	3.13	3.25	3.38	3.5	3.63	3.75	3.88	4
Z	57.14	64.0	74.29	81.14	91.43	105.14	115.43	129.14	142.86

Вариант № 19. $Z=At^4+Dt+K$

t	0.88	0.9	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.99	1
Z	0.029	0.086	0.17	0.31	0.43	0.57	0.71	0.86	0.97

Вариант № 20. $Y=Ax^3+D$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	0.072	0.073	0.075	0.096	0.12	0.16	0.24	0.35	0.42	0.47

Вариант № 21. $R=At^3+Ct^2$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	2.11	5.2	11.15	19.27	26.2	30.37	32.0	33.0	33.22	33.2

Вариант № 22. $W(s)=1/(Bs-C)$

s	2	2.38	2.75	3.13	3.5	3.88	4.25	4.63	5
W	3.5	2.29	2.29	1.99	1.71	1.5	1.35	1.21	1.14

Вариант № 23. $V(s)=As^3/Bs^2$

s	1	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20
V	1.11	1.57	2.26	2.84	3.25	3.75	4.05	4.45	4.75

Вариант № 24. $Y=x/(Ax+B)$

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
Y	0.2140	0.2210	0.2237	0.2258	0.2262	0.2268	0.2275	0.2283	0.2288

Вариант № 25. $V(s)=As^3+B/s^2-D$

s	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12
V	25.75	27.25	29.5	31.0	32.5	34.0	35.5	37.75	39.25

1.5. Содержание отчета

1. Тема и цель работы
2. Номер варианта и задание на выполнение лабораторной работы
3. MathCad- документ, который содержит необходимые вычисления и графики.
4. Выводы

Защитита отчета по лабораторной работе производится в ходе беседы с преподавателем, по результатам ответов студента.